ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝ. ΧΡ. ΤΣΑΜΑΤΟΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΝ. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

Φεβρουάριος 2016

1. Να δοθεί ο ορισμός των ισοδυνάμων μετρικών σ' ένα σύνολο. Επιπλέον, αν (E,ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και, με δεδομένο ότι η συνάρτηση $\tau : E \to \mathbb{R}$, με $\tau(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, είναι μια μετρική στο E, ν' αποδειχτεί ότι οι μετρικές ρ, τ είναι ισοδύναμες. 1μ.

2. Να δοθούν οι ορισμοί της βάσης μιας τοπολογίας και της βάσης ενός συστήματος περιοχών σ' έναν τοπολογικό χώρο. Επιπλέον, ν' αποδειχτεί ότι, αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση μιας τοπολογίας $\mathcal{J}$ σ' έναν τοπολογικό χώρο E, τότε, για τυχόν $x \in E$, η συλλογή $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ είναι βάση του συστήματος περιοχών $\mathcal{N}_x$. 1μ.

3. **α)** Να δοθεί ο ορισμός της σύγκλισης ενός δικτύου σ' έναν τοπολογικό χώρο.

β) Έστω $(E, \mathcal{J})$ ένας τοπολογικός χώρος και x τυχόν στοιχείο του E. Ν' αποδειχτεί ότι το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$ μπορεί να γίνει κατευθυνόμενο σύνολο. 1

? **γ)** Για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ εκλέγουμε $x_V \in V$ και θεωρούμε το δίκτυο $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_x}$. Ν' αποδειχτεί ότι $x_V \to x$. 1,5

4. Να δοθεί ο ορισμός του τοπολογικού χώρου 1^{ης} αριθμησιμότητας και ν' αποδειχτεί ότι, αν ένας τοπολογικός χώρος $(E, \mathcal{J})$ είναι πρώτης αριθμησιμότητας και κάθε ακολουθία του E συγκλίνει σε ένα το πολύ σημείο του E, τότε ο $(E, \mathcal{J})$ είναι T_2 - χώρος. 0.5 1,5 μ.

5. Να δοθεί ο ορισμός του τοπολογικού χώρου $2^{ης}$ αριθμησιμότητας και ν' αποδειχτεί ότι αν ένας τοπολογικός χώρος $(E,\mathcal{J})$ είναι $2^{ης}$ αριθμησιμότητας και $\mathcal{A}$ είναι μια συλλογή αποτελούμενη από ανοιχτά και ανά δύο ξένα υποσύνολα του $(E,\mathcal{J})$, τότε η συλλογή $\mathcal{A}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη. 1,5 μ. 0.5

? **6.** Να δοθεί ο ορισμός του κανονικού τοπολογικού χώρου και ν' αποδειχτεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Ο τοπολογικός χώρος $(E,\mathcal{J})$ είναι κανονικός χώρος.

(β) Για τυχόντα κλειστά και ξένα υποσύνολα F_1, F_2 του E υπάρχει $V \in \mathcal{J}$, με $F_1 \subseteq V$ και $\overline{V} \cap F_2 = \emptyset$.

(γ) Για τυχόντα κλειστά και ξένα υποσύνολα F_1, F_2 του E υπάρχουν A, B εν $\mathcal{J}$, με $F_1 \subseteq A$, $F_2 \subseteq B$ και $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. (0.5) 1,5 μ.

7. Έστω η συλλογή $\mathcal{J}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, που αποτελείται από το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$ και τα διαστήματα της μορφής (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$. Ν' αποδειχτεί ότι η $\mathcal{J}$ είναι μια τοπολογία στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν τα σύνολα $\overline{[3,7)}$, $\overline{\{7, 24, 47, 85\}}$ και $\overline{\{3, 6, 9, 12, \dots\}}$. 1,5μ

8. Ν' αποδειχτεί ότι ένας διακριτός τοπολογικός χώρος $(E,\mathcal{J})$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν το E είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο. 1 μ.

Καλή Επιτυχία

Παναγιώτης Χρ. Τσαμάτος